Vektoranalysis

Wegintegrale & Potentiale

Vektoranalysis

Wegintegrale & Potentiale

Inhalt

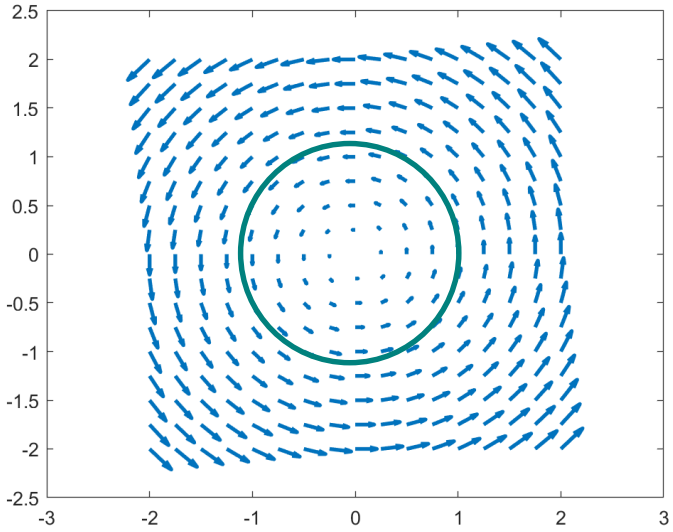
Übersicht:

- Integration über geschlossene Wege & Wegunabhängigkeit
- konservative Kraftfelder
- Kriterien für Konservative Kraftfelder
- Berechnung von Potentialen

Beispiel

Wir integrieren entlang des Einheitskreises mit Mittelpunkt im Ursprung über das folgende Vektorfeld…

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$



Parametrisierung: $\vec{\gamma}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \varphi \in [0,2\pi)$

Tangentenvektor: $\vec{\gamma}'(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}, \varphi \in [0,2\pi)$

Wegintegral:

$$\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} d\varphi = \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}_{=1} \, d\varphi = 2\pi$$

ungleich null!

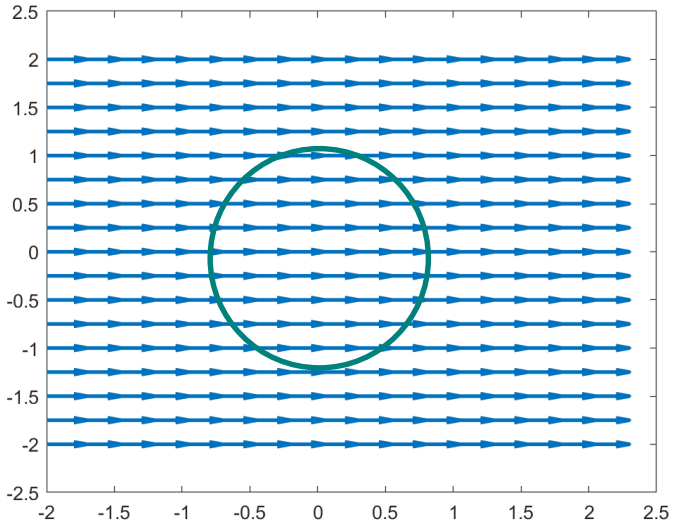
Beispiel

Wir integrieren entlang des Einheitskreises mit Mittelpunkt im Ursprung über das folgende Vektorfeld…

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Parametrisierung: $\vec{\gamma}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \varphi \in [0,2\pi)$

Tangentenvektor: $\vec{\gamma}'(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}, \varphi \in [0,2\pi)$

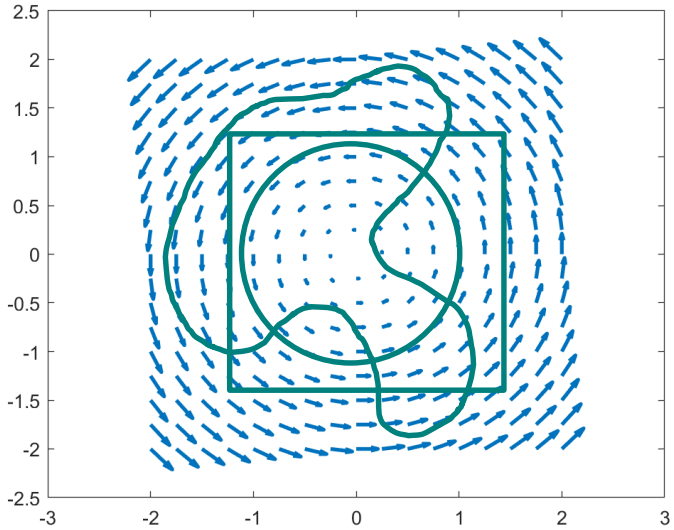


Wegintegral:

$$\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} d\varphi = \int_0^{2\pi} -\sin\varphi \; d\varphi = 0$$

gleich null!

Integral über geschlossene Wege



In den letzten Beispielen haben wir über einen geschlossenen Weg integriert.

Hier wird häufig (besonders in der Physik) eine andere Notation verwendet…

$$\oint_{\Gamma} \vec{F}(\vec{x}) \cdot \overrightarrow{dx}$$

Der Kreis im Integralzeichen steht für den geschlossenen Weg, wobei der Weg keine Kreisbahn sein muss…

Offene Frage:

Wann verschwindet ein Wegintegral über einen geschlossenen Weg?

Vektoranalysis

Wegintegrale & Potentiale

Konservative Kraftfelder

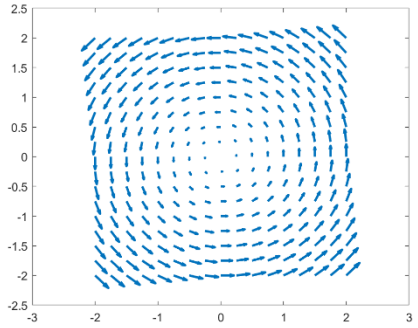
Definition:

Ein Kraftfeld $\vec{F}$ wird konservativ genannt, wenn das Wegintegral über alle geschlossenen Wege verschwindet, d.h. wenn für alle geschlossenen Γ gilt:

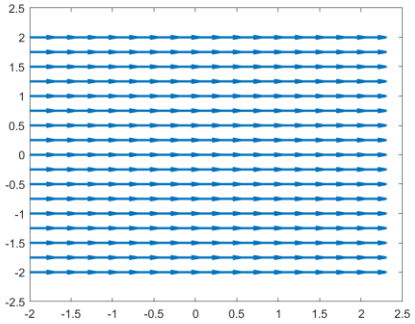
$$\oint_{\Gamma} \vec{F}(\vec{x}) \cdot \overrightarrow{dx} = 0$$

Konservative Kraftfelder in der Physik:

- Gravitationskraft
- Coulomb Kraft



nicht konservativ



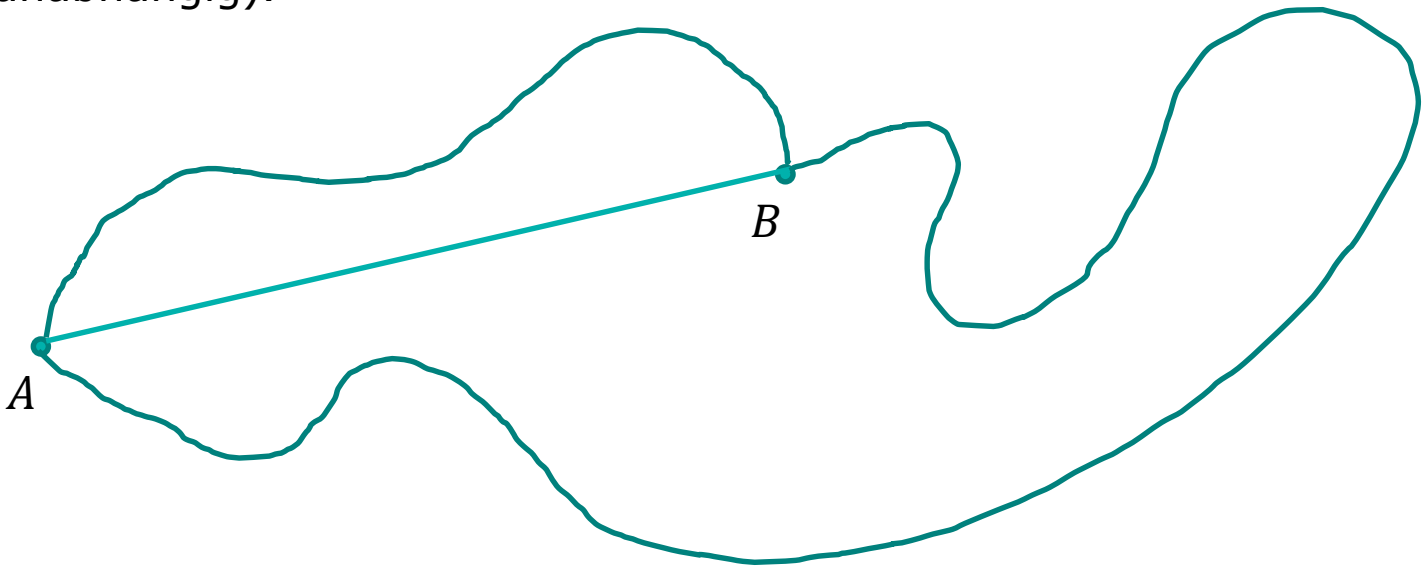
konservativ

Kriterien für konservative Kraftfelder

Neben der Definition gibt es weitere Eigenschaften, welche konservative Kraftfelder kennzeichnen…

Satz:

Ein Vektorfeld $\vec{F}$ ist genau dann konservativ, wenn das Wegintegral vom Punkt A zum Punkt B nur von der Lage der Punkte abhängt, aber nicht vom Weg (wegunabhängig).



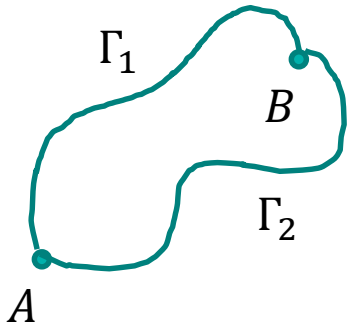
Kriterien für konservative Kraftfelder

Satz:

Ein Vektorfeld $\vec{F}$ ist genau dann konservativ, wenn das Wegintegral vom Punkt A zum Punkt B nur von der Lage der Punkte abhängt, aber nicht vom Weg (wegunabhängig).

Beweis: $\vec{F}$ ist konservativ ⇒ wegunabhängig

Wir betrachten zwei beliebige Wege Γ_1 und Γ_2 von A nach B…



Die beiden Wege bilden zusammen einen geschlossenen Weg Γ, wenn wir z.B. bei Γ_2 die Orientierung (Richtung) umkehren…

$\vec{F}$ ist konservativ ⇒ $0 = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dx} = \int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dx} - \int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dx}$

⇒ $\int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dx} = \int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dx}$ (wegunabhängig)

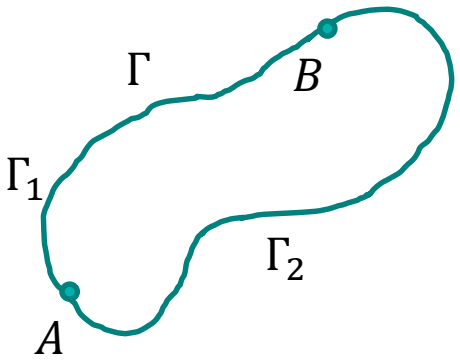
Kriterien für konservative Kraftfelder

Satz:

Ein Vektorfeld $\vec{F}$ ist genau dann konservativ, wenn das Wegintegral vom Punkt A zum Punkt B nur von der Lage der Punkte abhängt, aber nicht vom Weg (wegunabhängig).

Beweis: wegunabhängig ⇒ $\vec{F}$ ist konservativ

Wir betrachten einen beliebigen geschlossenen Weg Γ …



Wir definieren auf diesem zwei beliebige Punkte A und B, welche den geschlossenen Weg in zwei Teile Γ_1 und Γ_2 teilen, die jeweils von A nach B laufen…

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dx} = \underbrace{\int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dx}}_{\text{gleich da wegunabhängig}} - \underbrace{\int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dx}}_{\text{gleich da wegunabhängig}} = 0 \qquad \text{(konservativ)}$$

Kriterien für konservative Kraftfelder

Wir haben folgendes gefunden:

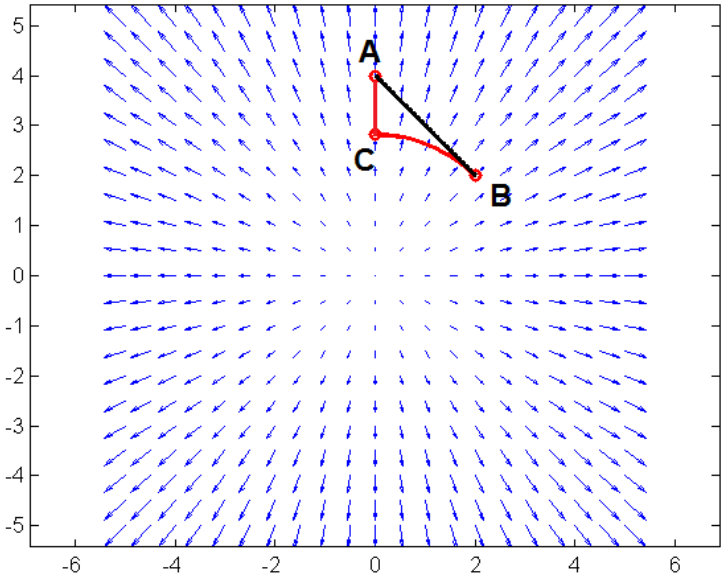
$\vec{F}$ konservativ  Integral über geschlossene Wege verschwindet

$\vec{F}$ konservativ  Integral von A nach B ist wegunabhängig

Vektoranalysis

Wegintegrale & Potentiale

Beispiel



Wir wollen für das Vektorfeld $\vec{F}$ das Wegintegral von A nach B für zwei verschiedene Wege berechnen und vergleichen…

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad A = (0,4) \quad B = (2,2)$$

Schwarzer Weg: Gerade von A nach B

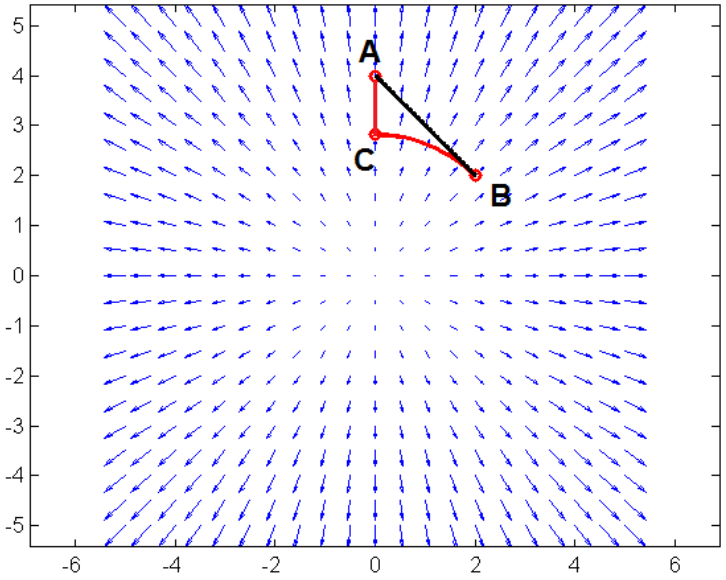
$$\vec{\gamma}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ 4 - 2\lambda \end{pmatrix} \qquad \lambda \in [0,1] \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\gamma}'(\lambda) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\int_\Gamma \vec{F}(\vec{x}) \cdot \overrightarrow{dx} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 2\lambda \\ 4 - 2\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} d\lambda = \int_0^1 8\lambda - 8 \; d\lambda = -4$$

Vektoranalysis

Wegintegrale & Potentiale

Beispiel



Wir wollen für das Vektorfeld $\vec{F}$ das Wegintegral von A nach B für zwei verschiedene Wege berechnen und vergleichen…

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad A = (0,4) \qquad B = (2,2)$$

Roter Weg: Gerade von A nach C und Kreisbogen

$$\int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dx} + \underbrace{\int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dx}}_{=0}$$

Da entlang der Äquipotentiallinien…

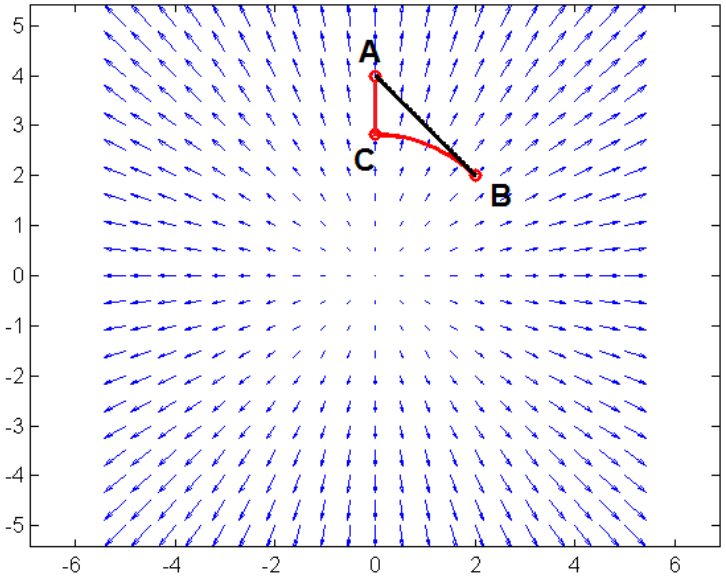
➡ Wir rechnen nur entlang der Geraden…

Vektoranalysis

Wegintegrale & Potentiale

Beispiel

Wir wollen für das Vektorfeld $\vec{F}$ das Wegintegral von A nach B für zwei verschiedene Wege berechnen und vergleichen…



$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad A = (0,4) \quad B = (2,2)$$

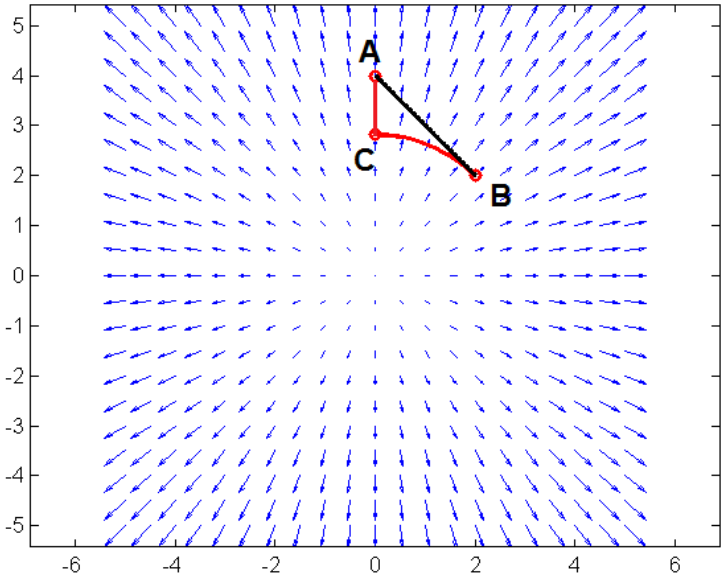
Roter Weg: Gerade von A nach C und Kreisbogen

$$\vec{\gamma}_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 + \lambda(\sqrt{8} - 4) \end{pmatrix} \quad \lambda \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad \vec{\gamma}_1{}'(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{8} - 4 \end{pmatrix}$$

$$\int_\Gamma \vec{F}(\vec{x}) \cdot \overrightarrow{dx} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 + \lambda(\sqrt{8} - 4) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{8} - 4 \end{pmatrix} d\lambda = \cdots = -4$$



Beispiel



Wir wollen für das Vektorfeld $\vec{F}$ das Wegintegral von A nach B für zwei verschiedene Wege berechnen und vergleichen…

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad A = (0,4) \quad B = (2,2)$$

Roter Weg: Gerade von A nach C und Kreisbogen

Wir wählen eine einfachere Parametrisierung…

$$\vec{\gamma}_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \quad \lambda \in [4, \sqrt{8}] \quad \Rightarrow \quad \vec{\gamma}_1{}'(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\int_\Gamma \vec{F}(\vec{x}) \cdot \overrightarrow{dx} = \int_4^{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\lambda = \int_4^{\sqrt{8}} \lambda \; d\lambda = \left[\frac{1}{2} \lambda^2 \right]_4^{\sqrt{8}} = -4$$



Was zeigen uns die Beispiele?

Wenn das Kraftfeld konservativ ist…

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Was zeigen uns die Beispiele?

Wenn das Kraftfeld konservativ ist…

… müssen Wegintegrale über geschlossene Wege nicht berechnet werden, da sie automatisch null sind

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Was zeigen uns die Beispiele?

Wenn das Kraftfeld konservativ ist…

… müssen Wegintegrale über geschlossene Wege nicht berechnet werden, da sie automatisch null sind

… ist das Wegintegral wegunabhängig, d.h. wir können uns einen einfachen Weg von A nach B aussuchen, um eine möglichst einfache Rechnung zu erhalten



Uns fehlt immer noch ein handliches Kriterium für konservative Kraftfelder…

Konservative Kraftfelder und Potentiale

Wir machen einen „Umweg“ und betrachten zunächst den folgenden…

Satz:

Das Wegintegral über ein Kraftfeld $\vec{F}$ ist genau dann wegunabhängig, wenn ein Skalarfeld (Potential) φ existiert mit…

$$\vec{F} = \nabla\varphi$$

Was haben wir von dieser Aussage?

Wir erhalten ein handliches Kriterium für konservative Kraftfelder, da unter gewissen Bedingungen gilt…

$$\vec{F} = \nabla\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}$$

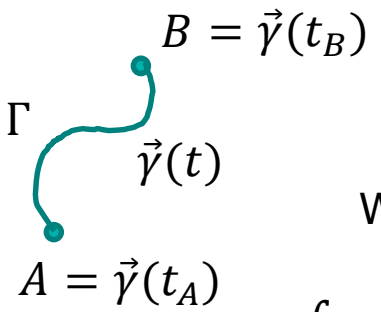
Konservative Kraftfelder und Potentiale

Satz:

Das Wegintegral über ein Kraftfeld $\vec{F}$ ist genau dann wegunabhängig, wenn ein Skalarfeld (Potential) φ existiert mit…

Beweis: Wir zeigen folgende Richtung… $\vec{F} = \nabla\varphi$ ⇒ wegunabhängig

Wir betrachten einen beliebigen Weg von A nach B…



Substitution: $\vec{F}(\vec{x}) = \nabla\varphi(\vec{x}) = \nabla\varphi(\vec{\gamma}(t))$

Wir leiten das Skalarfeld ab… $\frac{d}{dt}\varphi\left(\vec{\gamma}(t)\right) = \nabla\varphi\left(\vec{\gamma}(t)\right) \cdot \vec{\gamma}'(t)$

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot \overrightarrow{dx} = \int_\Gamma \nabla\varphi(\vec{x}) \cdot \overrightarrow{dx} = \int_{t_A}^{t_B} \underbrace{\nabla\varphi(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t)}_{\frac{d}{dt}\varphi\left(\vec{\gamma}(t)\right)}\, dt = \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt}\varphi\left(\vec{\gamma}(t)\right) dt$$

$$= \varphi(\vec{\gamma}(t_B)) - \varphi(\vec{\gamma}(t_A))$$

$$= \varphi(B) - \varphi(A)$$

Vektoranalysis

Wegintegrale & Potentiale

Konservative Kraftfelder und Potentiale

Bedeutung…

Konservative Kraftfelder und Potentiale

Bedeutung…

Wenn ein Potential zum Vektorfeld $\vec{F}$ existiert, d.h. $\vec{F} = \nabla\varphi$ dann ergibt sich das Wegintegral von A nach B aus der Potentialdifferenz zwischen den Punkten A und B…

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dx} = \varphi(B) - \varphi(A)$$

Konservative Kraftfelder und Potentiale

Bedeutung…

Wenn ein Potential zum Vektorfeld $\vec{F}$ existiert, d.h. $\vec{F} = \nabla\varphi$ dann ergibt sich das Wegintegral von A nach B aus der Potentialdifferenz zwischen den Punkten A und B…

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dx} = \varphi(B) - \varphi(A)$$

Wir wissen bereits, dass ein Potential durch $\vec{F} = \nabla\varphi$ nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist.

$$\vec{F} = \nabla\varphi = \nabla(\varphi + \text{const})$$

Bei der Bestimmung des Wegintegrals (der Arbeit), verschwindet diese Konstante aber, da die Differenz $\varphi(B) - \varphi(A)$ gebildet wird.

Zusammenfassung Konservative Kraftfelder

Für ein Vektorfeld $\vec{F}$ sind folgende Aussagen äquivalent…

… $\vec{F}$ ist konservativ

… das Wegintegral über alle geschlossenen Kurven verschwindet

… das Wegintegral ist wegunabhängig, d.h. hängt nur vom Anfangs und Endpunkt ab, aber nicht vom Weg

… $\vec{F}$ ist ein Gradientenfeld, d.h. es existiert ein Potential φ mit $\vec{F} = \nabla\varphi$

… $\vec{F}$ ist wirbelfrei, d.h. es gilt $\mathrm{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$

Vektoranalysis

Wegintegrale & Potentiale

Zusammenfassung Konservative Kraftfelder

Für ein Vektorfeld $\vec{F}$ sind folgende Aussagen äquivalent…

… $\vec{F}$ ist konservativ

… das Wegintegral über alle geschlossenen Kurven verschwindet

… das Wegintegral ist wegunabhängig, d.h. hängt nur vom Anfangs und Endpunkt ab, aber nicht vom Weg

… $\vec{F}$ ist ein Gradientenfeld, d.h. es existiert ein Potential φ mit $\vec{F} = \nabla\varphi$

… $\vec{F}$ ist wirbelfrei, d.h. es gilt $\mathrm{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$

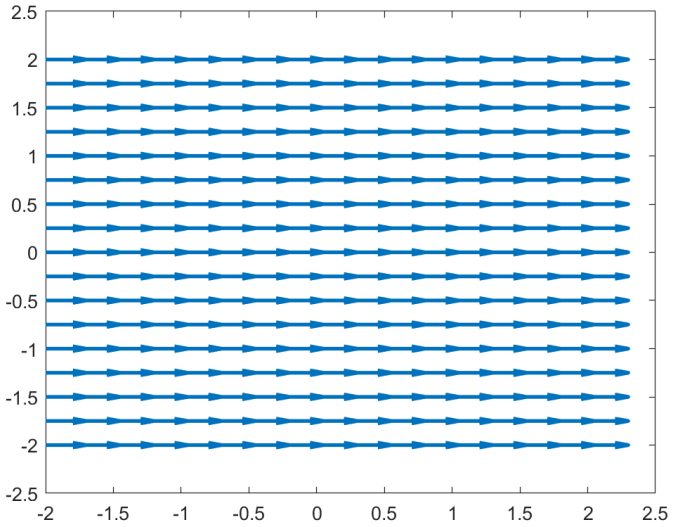
Bedeutung:

Ich weiß, dass $\vec{F}$ konservativ ist (z.B. da wirbelfrei) und kann dann die Aussagen zwei, drei und vier zur Erleichterung der Rechnungen nutzen.

Beispiele für konservative Felder

Wir betrachten noch einmal…

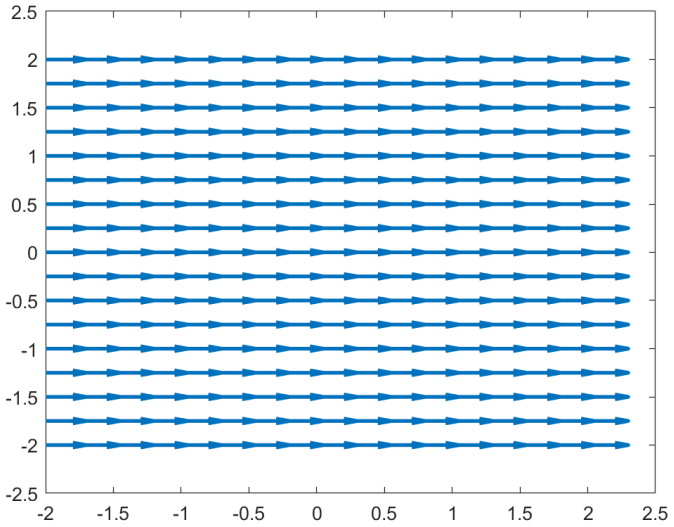
$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Beispiele für konservative Felder

Wir betrachten noch einmal…

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Wir erweitern um eine Nullkomponente und berechnen die Rotation…

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

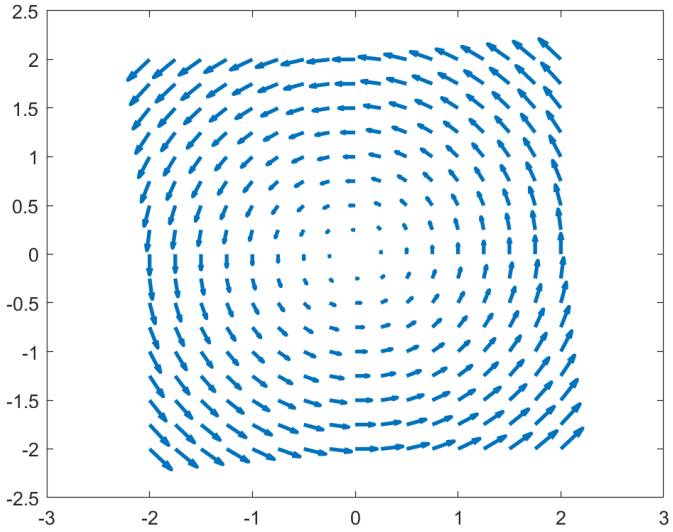
$\Rightarrow$ Konservatives Feld

$\Rightarrow$ Integral über geschlossene Wege = 0

Beispiele für konservative Felder

Wir betrachten noch einmal…

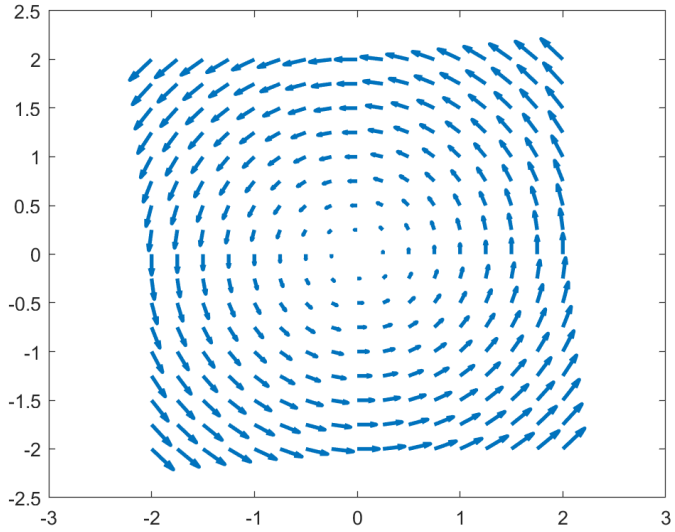
$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$



Vektoranalysis

Wegintegrale & Potentiale

Beispiele für konservative Felder



Wir betrachten noch einmal…

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Wir erweitern um eine Nullkomponente und berechnen die Rotation…

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

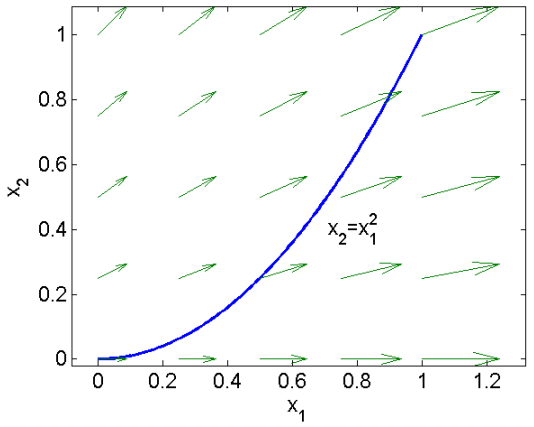
⇒ Kein konservatives Feld

⇒ Integral über geschlossene Wege ≠ 0

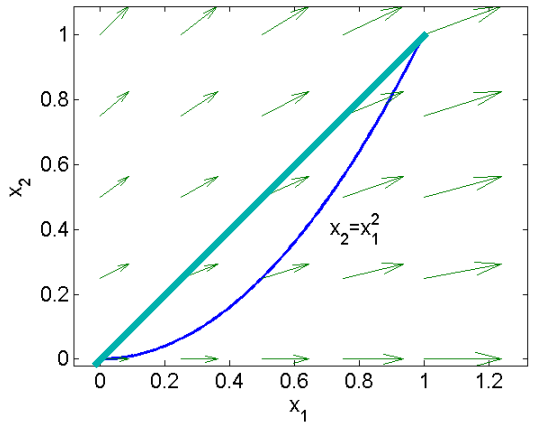
Beispiele für konservative Felder

Wir wollen das folgende Vektorfeld über den eingezeichneten Weg integrieren…

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} e^{x_1} \\ \sqrt{x_2} \end{pmatrix}$$



Beispiele für konservative Felder



Wir wollen das folgende Vektorfeld über den eingezeichneten Weg integrieren…

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} e^{x_1} \\ \sqrt{x_2} \end{pmatrix}$$

Wir überprüfen zuerst ob das Vektorfeld konservativ ist, indem wir die Rotation bestimmen…

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} e^{x_1} \\ \sqrt{x_2} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ konservatives Feld

$\Rightarrow$ Wegunabhängig, suche einfachen Weg

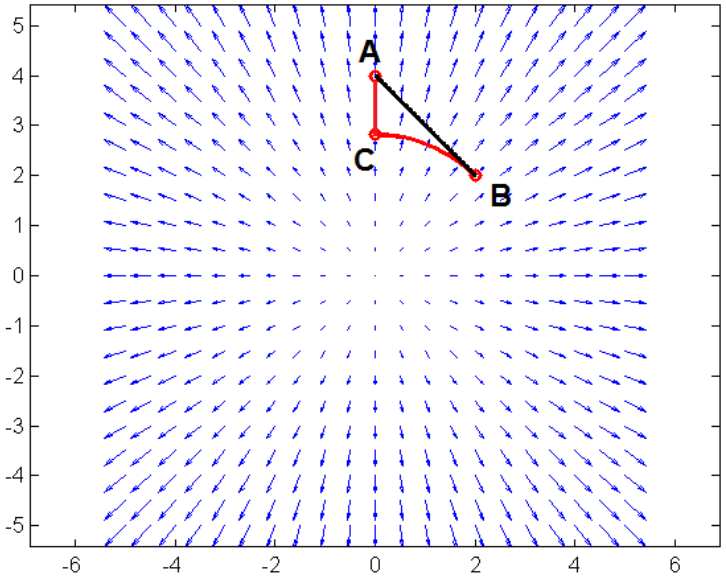
Vektoranalysis

Wegintegrale & Potentiale

Jetzt sind Sie dran…

Wir hatten behauptet, dass folgendes Vektorfeld konservativ ist, stimmt das?

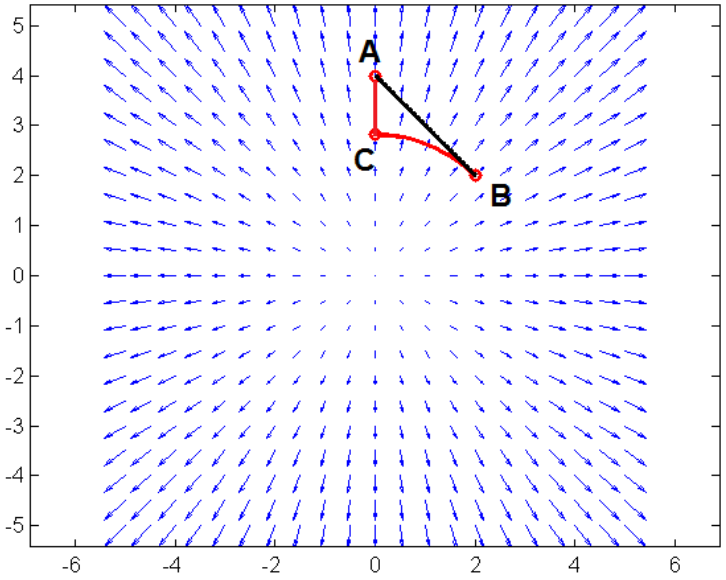
$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$



Vektoranalysis

Wegintegrale & Potentiale

Jetzt sind Sie dran…



Wir hatten behauptet, dass folgendes Vektorfeld konservativ ist, stimmt das?

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen die Rotation…

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ konservatives Feld

$\Rightarrow$ egal ob roter oder schwarzer Weg

Zusammenhang Kraftfeld und Potential

Wir wollen nun das Kraftfeld bzw. das Potential bestimmen…

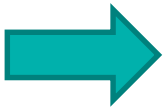
FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Zusammenhang Kraftfeld und Potential

Wir wollen nun das Kraftfeld bzw. das Potential bestimmen…

Ausgangspunkt: Potential φ

Gesucht… Kraftfeld $\vec{F} = \nabla\varphi$



einfach Gradient ausrechnen…

Jetzt sind Sie an der Reihe…

Bestimmen Sie das Kraftfeld, welches zu folgendem Potential gehört:

$$\varphi(x_1, x_2) = x_1^3 x_2 + x_2^2$$

Jetzt sind Sie an der Reihe…

Bestimmen Sie das Kraftfeld, welches zu folgendem Potential gehört:

$$\varphi(x_1, x_2) = x_1^3 x_2 + x_2^2$$

Wir berechnen den Gradienten:

$$\vec{F} = \nabla\varphi = \begin{pmatrix} 3x_1^2 x_2 \\ x_1^3 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

Achtung:

In der Physik wird oft aus Konventionsgründen folgender Zusammenhang angenommen…

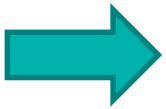
$$\vec{F} = -\nabla\varphi$$

Zusammenhang Kraftfeld und Potential

Wir wollen nun das Kraftfeld bzw. das Potential bestimmen…

Ausgangspunkt: Kraftfeld $\vec{F} = \nabla\varphi$

Gesucht… Potential φ



Wir betrachten ein Beispiel…

Beispiel

Wir betrachten folgendes Vektorfeld…

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 3x_1^2 x_2 \\ x_1^3 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Wir betrachten folgendes Vektorfeld…

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 3x_1^2 x_2 \\ x_1^3 \end{pmatrix}$$

Ist $\vec{F}$ konservativ?

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 3x_1^2 x_2 \\ x_1^3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Wir betrachten folgendes Vektorfeld…

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 3x_1^2 x_2 \\ x_1^3 \end{pmatrix}$$

Ist $\vec{F}$ konservativ?

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 3x_1^2 x_2 \\ x_1^3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es existiert also ein Potential, das wir wie folgt berechnen…

$$\nabla\varphi = \vec{F} = \begin{pmatrix} 3x_1^2 x_2 \\ x_1^3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \partial_{x_1}\varphi &= 3x_1^2 x_2 \\ \partial_{x_2}\varphi &= x_1^3 \end{aligned}$$

Beispiel

Wir berechnen das Potential…

$$\partial_{x_1}\varphi = 3x_1^2 x_2 \quad \Rightarrow \quad \int \partial_{x_1}\varphi \; dx_1 = \int 3x_1^2 x_2 dx_1$$

Integrieren

$$\Rightarrow \quad \varphi = x_1^3 x_2$$

$$\partial_{x_2}\varphi = x_1^3 \quad \Rightarrow \quad \int \partial_{x_2}\varphi \; dx_2 = \int x_1^3 dx_2$$

Integrieren

$$\Rightarrow \quad \varphi = x_1^3 x_2$$



$$\Rightarrow \quad \varphi = x_1^3 x_2 + \mathrm{C}$$

Beispiel

Wir suchen zu folgendem konservativen Kraftfeld ein Potential

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Wir suchen zu folgendem konservativen Kraftfeld ein Potential

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

Wir integrieren wieder…

$$\partial_{x_1}\varphi = 2x_1 \quad \Rightarrow \quad \int \partial_{x_1}\varphi \; dx_1 = \int 2x_1 dx_1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = x_1^2$$



$$\partial_{x_2}\varphi = 2x_2 \quad \Rightarrow \quad \int \partial_{x_2}\varphi \; dx_1 = \int 2x_2 dx_2 \quad \Rightarrow \quad \varphi = x_2^2$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = x_1^2 + x_2^2 + \mathrm{C}$$

Jetzt sind Sie an der Reihe…

Wir suchen zu folgendem konservativen Kraftfeld ein Potential

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 2x_1x_2 \\ x_1^2 \end{pmatrix}$$